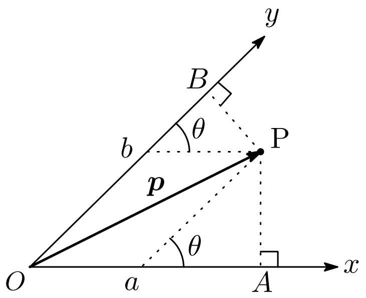
第5話　斜交座標とテンソル

5.1　斜交座標

- K氏：いままでの議論は座標系としてはすべていわゆる直線直交座標系を考えていた．しかし空間の一点指定するに際して設定する座標系は別にそれだけに限らない．球面座標系とか直交曲線座標系その他いろいろあるわけだが，これから議論する座標系として直線斜交座標を考えることにする．以下，直線という接頭語をいちいち付けるのは面倒だから省略する．



(1)
$$\overline{OA} = \overline{Oa} + \overline{Ob}\cos\theta$$
$$\overline{OB} = \overline{Ob} + \overline{Oa}\cos\theta$$

(2)
$$\overline{Oa} = (\overline{OA} - \overline{OB}\cos\theta)/\sin^2\theta$$
$$\overline{Ob} = (\overline{OB} - \overline{OA}\cos\theta)/\sin^2\theta$$

さて，簡単のため2次元平面で考えよう．図のP点を指定するのに(1)座標(A, B)を指定するのと(2)座標(a, b)を指定する2つの方法がある． ベクトル$\boldsymbol{p}$の大きさを求める場合，(1)では

$$\|\boldsymbol{p}\| = \sqrt{\overline{OA}^2 + (\overline{Ob}\sin\theta)^2} = \sqrt{(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\theta)/\sin^2\theta} \tag{5.1.1}$$

一方(2)では余弦定理を使うと

$$\|\boldsymbol{p}\| = \sqrt{\overline{Oa}^2 + \overline{Ob}^2 + 2\overline{Oa}\cdot\overline{Ob}\cos\theta} \tag{5.1.2}$$

となり，いずれの場合もピタゴラスの定理のような簡単な式にはならない．シカシ，(1)にそれぞれ$\overline{Oa}, \overline{Ob}$を掛けて足すと

$$\overline{Oa}\cdot\overline{OA} + \overline{Ob}\cdot\overline{OB} = \overline{Oa}^2 + \overline{Ob}^2 + 2\overline{Oa}\cdot\overline{Ob}\cos\theta$$

となるので，(5.1.2)は

$$\|\boldsymbol{p}\| = \sqrt{\overline{Oa}\cdot\overline{OA} + \overline{Ob}\cdot\overline{OB}} \tag{5.1.3}$$

と簡単な式で表される．ということで，斜交座標を採用した場合，(1)と(2)の量を併用すると見通しが良くなることが分かる．

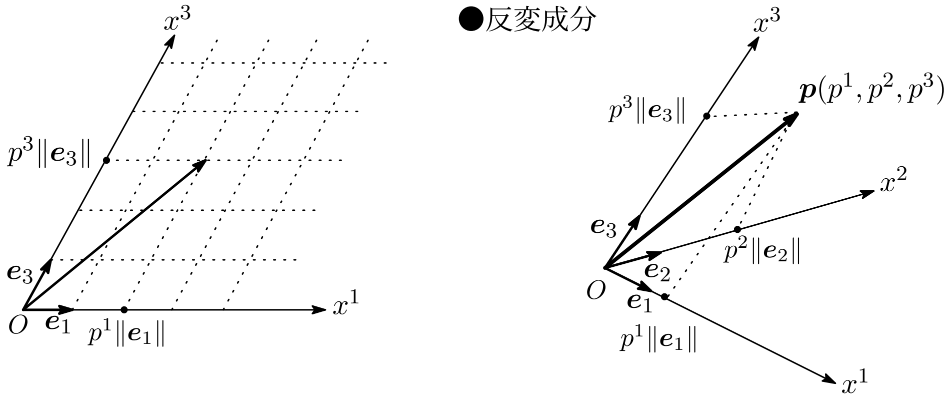
- エミリー：斜交座標の場合，両睨みでことを進めればいいということね.

5.1.1　ベクトルの反変成分と共変成分

- K氏：そうだね．斜交座標をもう少し詳しく調べていこう．斜交座標軸を直交軸と区別するために x_1, x_2, x_3 軸の番号を右肩につけた x^1, x^2, x^3 軸とし，基底ベクトルを $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ とする．座標軸の上付き添え字に対して基底ベクトルの添え字を下付きにしたが，その理由は追々分かってくる．添え字を下付きにした基底を共変基底というが，いまそのことは置いておいて，基底ベクトルの長さも 1 とは限らず，まら，各軸の基底ベクトルの長さも相等しいとは限らない座標系だ．この座標系を Σ 系としよう．$\boldsymbol{e}_i$ は互いに直交していないが，1 次独立のベクトルだ． そして $\boldsymbol{e}_1$ を p^1 倍，$\boldsymbol{e}_2$ を p^2 倍，$\boldsymbol{e}_3$ を p^3 倍したものの和としてベクトル $\boldsymbol{p}$ を作ることができる．

$$\boldsymbol{p} = p^1\boldsymbol{e}_1 + p^2\boldsymbol{e}_2 + p^3\boldsymbol{e}_3 \tag{5.1.4}$$

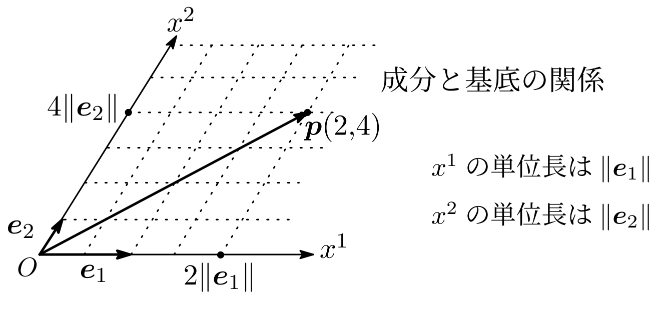
(5.1.4) で表されるベクトル $\boldsymbol{p}$ の成分 (p^1, p^2, p^3) を基底 $\boldsymbol{e}_i$ に対する反変成分といい，添え字を



上付きで表す．

- エミリー：え〜っと，上の右の図を見れば x^1, x^2, x^3 軸上にベクトル $\boldsymbol{p}$ のそれぞれの成分と思われる $p^1\|\boldsymbol{e}_1\|$, $p^2\|\boldsymbol{e}_2\|$, $p^3\|\boldsymbol{e}_3\|$ が書かれているけど，それが $\boldsymbol{p}$ の成分になるのじゃないの？

- K氏：そのように誤解しやすいよね．基底の長さが 1，つまり $\|\boldsymbol{e}_i\| = 1$ の場合はエミリーの指摘通りだ．しかし，いまは基底の長さを 1 に限定していないだろう．



一般にベクトルの成分は

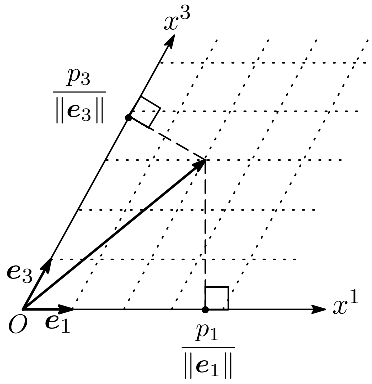
$$\boldsymbol{p} = p^1\boldsymbol{e}_1 + p^2\boldsymbol{e}_2 + p^3\boldsymbol{e}_3 \tag{5.1.5}$$

で各基底にかかる係数のことを言った．基底の長さが 1 であれば，たとえば x^1 軸上への $\boldsymbol{p}$ の射影長は p^1 に等しい．しかし，いまは基底の長さを $\|\boldsymbol{e}_i\|$ としているので，$\boldsymbol{p}$ の x^1 軸上での長さは $\sqrt{p^1\boldsymbol{e}_1 \cdot p^1\boldsymbol{e}_1} = p^1\|\boldsymbol{e}_1\|$ となる．ベクトル成分の長さではないんだね．

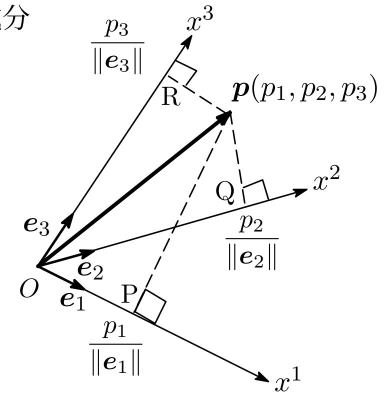
- エミリー：ナルホド，了解したわ．
- K氏：一方，

$$p_1 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_1, \quad p_2 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_2, \quad p_3 = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_3 \tag{5.1.6}$$

を $\boldsymbol{p}$ の成分とすることもできる．



●共変成分



下付き添え字を持つ成分 (p_1, p_2, p_3) をベクトル $\boldsymbol{p}$ の共変成分という．ついでながら“ 下付き ”を“ 共変 ”というので基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ は共変ベクトルだね．(5.1.6) に (5.1.4) を入れると

$$p_i = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_i = (p^1\boldsymbol{e}_1 + p^2\boldsymbol{e}_2 + p^3\boldsymbol{e}_3)\cdot\boldsymbol{e}_i = p^j\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_i \tag{5.1.7}$$

となって，共変成分と反変成分の関係式がでてくる．斜交座標なので基底の内積は $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \neq 0$ だ．$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$ を g_{ij} とおけば，その成分数は全部で $3\times 3 = 9$ 個の 2 階テンソルだ．

$$g_{ij} = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j, \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \tag{5.1.8}$$

g_{ij} は斜交座標を特長づける重要な量で，これを計量行列とか共変計量行列と呼ばれる．明らかに $g_{ij} = g_{ji}$ で対称行列（対称テンソル）だね．

- エミリー：計量というネーミングの由来は？
- K氏：うん，ベクトルの成分というのは基底の取り方でかわるので，いわゆる幾何学的な量ではないよね．しかし，ベクトルの長さ

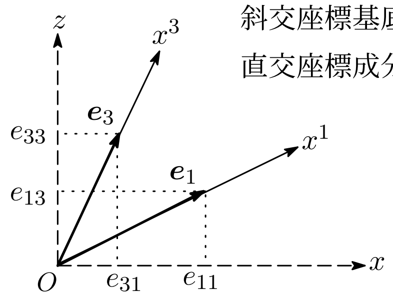
$$\|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{A^iA^j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j} = \sqrt{g_{ij}A^iA^j} \tag{5.1.9}$$

とか内積

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = A^iB^j\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = g_{ij}A^iB^j \tag{5.1.10}$$

これからベクトルの交差角が分かるが，これらは座標系によらない幾何学的な量で，g_{ij} はそれらの量を“ 計る ”もとになるものになっている．この意味で g_{ij} を計量と呼んでいるんだね．

　計量行列には逆行列 $(g_{ij})^{-1}$ が存在する，これは重要なポイントだ． 逆行列が存在する必要十分条件は $\det(g_{ij}) \neq 0$ で，それを以下に証明しよう．興味がなければ飛ばしでかまわない．斜交基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ の直線直交座標に関する成分をそれぞれ (e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}) とする．



斜交座標基底ベクトルの
直交座標成分

そうすると

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = e_{11}e_{11} + e_{12}e_{12} + e_{13}e_{13} \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = e_{11}e_{21} + e_{12}e_{22} + e_{13}e_{23} \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = e_{11}e_{31} + e_{12}e_{32} + e_{13}e_{33} \\ \qquad\qquad \vdots \end{cases}$$

となる．これを (5.1.8) の右辺の行列を行列式にしたものに入れ，転置行列式はもとの行列式に等しいことを使って整理すると

$$\det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_3 \\ \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix}^2 > 0$$

となる．これで，g_{ij} の逆行列の存在が保証できた．

計量行列 g_{ij} の逆行列を添え字を右上に付けた g^{ij} で表すと

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} = \frac{1}{\det(g_{ij})}\left\{ g_{11}\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - g_{21}\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - g_{31}\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix} \right\} \tag{5.1.11}$$

この (g^{ij}) を反変計量行列という．これは明らかに $g^{ij} = g^{ji}$ で対称行列だ．g_{ij} と g^{ij} の積は単位行列になる，

$$(g_{ij})(g^{ij}) = \boldsymbol{I}, \quad (g^{ij})(g_{ij}) = \boldsymbol{I}$$

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{12} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.1.12}$$

これから

$$g_{i\mu}g^{\mu j} = \delta_i^j, \quad g^{i\mu}g_{\mu j} = \delta_j^i = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \tag{5.1.13}$$

が成り立つ．g_{ij} を使えば (5.1.7) は

$$p_i = p^\mu g_{\mu i} = g_{i\mu}p^\mu \quad (i = 1, 2, 3) \tag{5.1.14}$$

と表される．この両辺に g^{ki} をかけ，i で縮約すると

$$g^{ki}p_i = g^{ki}g_{i\mu}p^\mu = \delta_\mu^k p^\mu = p^k, \quad \therefore\ p^k = g^{k\mu}p_\mu \quad (k = 1, 2, 3) \tag{5.1.15}$$

ただし，最後の式では見やすいように添え字を書き換えた．以上，計量行列の便利な機能を整理しておくと

$$\begin{cases} \text{●共変計量行列を使うとベクトルの反変成分から共変成分を得る事ができる．} \\ \qquad p_i = g_{ij}p^j \\ \text{●反変計量行列を使うとベクトルの共変成分から反変成分を得る事ができる．} \\ \qquad p^i = g^{ij}p_j \end{cases} \tag{5.1.16}$$

●添え字の付き方

共変ベクトル成分

$$p_i = g_{i\mu}\,p^{\mu}\,,$$

反変ベクトル成分

$$p^k = g^{k\mu}\,p_{\mu}$$

$$\begin{pmatrix} g_{i\mu}g^{\mu k} = \delta_i^k \\ g^{i\mu}g_{\mu k} = \delta_k^i \end{pmatrix}$$

- エミリー：ベクトル $\boldsymbol{p}$ の長さは計量行列を使えば

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{p}\| &= \sqrt{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}} = \sqrt{(p^1\boldsymbol{e}_1 + p^2\boldsymbol{e}_2 + p^3\boldsymbol{e}_3)^2} \\ &= \sqrt{g_{11}p^1p^1 + g_{22}p^2p^2 + g_{33}p^3p^3 + 2g_{12}p^1p^2 + 2g_{23}p^2p^3 + 2g_{31}p^3p^1} \\ &= \sqrt{g_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu}} \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

となり，$g_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu} = p_{\nu}p^{\nu} = p^{\mu}p_{\mu}$ なので，

$$\|\boldsymbol{p}\| = \sqrt{p_{\nu}\,p^{\nu}} = \sqrt{p^{\mu}\,p_{\mu}} \tag{5.1.18}$$

となるわね．§5.1「斜交座標」の図で出てきたベクトル $\boldsymbol{p}$ は $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$ はそれぞれ $p^1\|\boldsymbol{e}_1\|$, $p^2\|\boldsymbol{e}_2\|$, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ がそれぞれ $p_1/\|\boldsymbol{e}_1\|$, $p_2/\|\boldsymbol{e}_2\|$ となるので

$$\|\boldsymbol{p}\| = \sqrt{\overline{Oa}\cdot\overline{OA} + \overline{Ob}\cdot\overline{OB}} = \sqrt{p_1p^1 + p_2p^2} = \sqrt{p_{\nu}p^{\nu}} \tag{5.1.19}$$

という次第ね．

- K氏：そうだね．整理しておくとベクトル $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の反変成分をそれぞれ p^k, q^k とし，共変成分を p_k, q_k とすると内積は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p} &= g_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu} = p_{\nu}p^{\nu} = p^{\mu}p_{\mu} \\ \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} &= g_{\mu\nu}p^{\mu}q^{\nu} = p_{\nu}q^{\nu} = p^{\mu}q_{\mu} \end{aligned} \tag{5.1.20}$$

で表されるということだね．

5.1.2 座標変換

- K氏：さて，2つの斜交座標系 Σ, Σ' の斜交基底ベクトルをそれぞれ $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, $(\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3)$ とし，この間の座標変換の式を求めていこう．両座標系の原点は同じとする．これは線形変換なので

$$\boldsymbol{e}'_i = a^{\mu}{}_i\boldsymbol{e}_{\mu} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}'_1 \\ \boldsymbol{e}'_2 \\ \boldsymbol{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & a^2{}_1 & a^3{}_1 \\ a^1{}_2 & a^2{}_2 & a^3{}_2 \\ a^1{}_3 & a^2{}_3 & a^3{}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \tag{5.1.21}$$

とおく．係数行列を $A=a^{\mu}_{\ i}$ とすると $\boldsymbol{e}'_i$ と $\boldsymbol{e}_i$ は1次独立なので A は逆行列 A^{-1} をもつ．

$$A^{-1}=(a^{\mu}_{\ i})^{-1}=(b^{\mu}_{\ i}) \tag{5.1.22}$$

とおくと，$AA^{-1}=A^{-1}A=\boldsymbol{I}$ なので

$$a^{\mu}_{\ k}\,b^{k}_{\ i}=\delta^{\mu}_{i},\quad b^{\mu}_{\ k}\,a^{k}_{\ i}=\delta^{\mu}_{i} \tag{5.1.23}$$

$$\begin{pmatrix} a^{1}_{\ 1} & a^{2}_{\ 1} & a^{3}_{\ 1} \\ a^{1}_{\ 2} & a^{2}_{\ 2} & a^{3}_{\ 2} \\ a^{1}_{\ 3} & a^{2}_{\ 3} & a^{3}_{\ 3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^{1}_{\ 1} & b^{2}_{\ 1} & b^{3}_{\ 1} \\ b^{1}_{\ 2} & b^{2}_{\ 2} & b^{3}_{\ 2} \\ b^{1}_{\ 3} & b^{2}_{\ 3} & b^{3}_{\ 3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad\cdot\quad\cdot$$

が成り立つ．Σ' 系でのベクトル $\boldsymbol{p}$ の反変成分を p'^{ν} とすると

$$\begin{aligned} &p^{\mu}\boldsymbol{e}_{\mu}=p'^{\nu}\boldsymbol{e}'_{\nu}=p'^{\nu}(a^{\mu}_{\ \nu}\boldsymbol{e}_{\mu})=(a^{\mu}_{\ \nu}p'^{\nu})\boldsymbol{e}_{\mu}\longrightarrow p^{\mu}=a^{\mu}_{\ \nu}p'^{\nu} \\ \therefore\quad &p'^{\nu}=(a^{\mu}_{\ \nu})^{-1}p^{\mu}=b^{\mu}_{\ \nu}p^{\mu} \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

これが反変ベクトル成分の座標変換公式だ．次に Σ,Σ' 系でのベクトル $\boldsymbol{p}$ の共変成分を $p_{\mu},\,p'_{\ \mu}$ とすると $p_{\mu}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_{\mu}$ なので

$$p'_{\ \mu}=\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}'_{\ \mu}=\boldsymbol{p}\cdot(a^{\nu}_{\ \mu}\boldsymbol{e}_{\nu})=a^{\nu}_{\ \mu}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_{\nu}=a^{\nu}_{\ \mu}p_{\nu} \tag{5.1.25}$$

これが共変ベクトル成分の座標変換式となる．また，計量行列 g_{ij} は，Σ' 系で $g'_{ij}=\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'_j$ となるので

$$\begin{aligned} &g'_{ij}=\boldsymbol{e}'_i\cdot\boldsymbol{e}'_j=(a^{\mu}_{\ i}\boldsymbol{e}_{\mu})\cdot(a^{\nu}_{\ j}\boldsymbol{e}_{\nu})=a^{\mu}_{\ i}a^{\nu}_{j}\boldsymbol{e}_{\mu}\cdot\boldsymbol{e}_{\nu}=a^{\mu}_{\ i}a^{\nu}_{\ j}g_{\mu\nu} \\ \therefore\quad &g'_{ij}=a^{\mu}_{\ i}a^{\nu}_{\ j}g_{\mu\nu} \end{aligned} \tag{5.1.26}$$

g_{ij} は2階テンソルとしての変換を受ける．そこで計量行列という代わりに計量テンソルとも言われ，g_{ij} を計量テンソルの共変成分という．

チョッとごたごたしてきたので， 基底成分，反変成分，共変成分，計量行列の座標変換公式を整理しておこう．

$$\begin{cases} \cdot\text{基底成分の変換} & : \quad \boldsymbol{e}'_{\mu}=a^{\nu}_{\ \mu}\boldsymbol{e}_{\nu} \\ \cdot\text{反変成分の変換} & : \quad p'^{\nu}=(a^{\mu}_{\ \nu})^{-1}p^{\mu}=b^{\mu}_{\ \nu}p^{\mu} \\ \cdot\text{共変成分の変換} & : \quad p'_{\ \mu}=a^{\nu}_{\ \mu}p_{\nu} \\ \cdot\text{計量行列の変換} & : \quad g'_{ij}=a^{\mu}_{i}a^{\nu}_{j}g_{\mu\nu}\quad(2\text{階対称テンソル}) \end{cases} \tag{5.1.27}$$

- エミリー：反変とか共変というネーミングの由来はどこからくるのかしら？

- K氏：そうだね，上の座標変換公式を眺めると，共変ベクトル成分の係数行列 (a^{j}_{i}) は斜交基底の係数行列と同じだが，反変ベクトル成分の係数行列はその逆行列 $(a^{j}_{i})^{-1}$ になっているね．このことから“ 共 ”と“ 反 ”の接頭語がそれぞれに付いたんだね．

- エミリー：ところで本によっては p_i を共変ベクトル，p^i を反変ベクトルと書いてあるので，共変ベクトルと反変ベクトルの2つのベクトルがあるように錯覚しやすいけど，ベクトルは一つ．ただ基底の取り方で共変あるいは反変となるということね．反変ベクトルの場合は平行四辺形の原則でベクトル $\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{p}=p^1\boldsymbol{e}_1+p^2\boldsymbol{e}_2+p^3\boldsymbol{e}_3$ と図形的にもすぐ確かめられる．しかし，共変ベクトルの場合，そもそも基底がハッキリしないので何かスッキリしないのよね．$\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_2+(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_3$ とするわけにもいかないでしょう．

- K氏：うん，そうなんだね．そこで次に反変基底 $\boldsymbol{e}^i$ というものを説明していこう．

5.1.3　反変基底（双対基底）

- K氏：斜交座標系 Σ の基底 $\boldsymbol{e}_i$ に対して，原点を同じくする別の斜交座標系 Σ^* の基底を上付き添え字の $\boldsymbol{e}^i$ とし，

$$\left\{\begin{array}{lll} \boldsymbol{e}^1\cdot\boldsymbol{e}_1=1 & \boldsymbol{e}^2\cdot\boldsymbol{e}_1=0 & \boldsymbol{e}^3\cdot\boldsymbol{e}_1=0 \\ \boldsymbol{e}^1\cdot\boldsymbol{e}_2=0 & \boldsymbol{e}^2\cdot\boldsymbol{e}_2=1 & \boldsymbol{e}^3\cdot\boldsymbol{e}_2=0 \\ \boldsymbol{e}^1\cdot\boldsymbol{e}_3=0 & \boldsymbol{e}^2\cdot\boldsymbol{e}_3=0 & \boldsymbol{e}^3\cdot\boldsymbol{e}_3=1 \end{array}\right. \longrightarrow \boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j=\delta^i_j \tag{5.1.28}$$

を満たすものと定義する．$\boldsymbol{e}^i$ を反変基底と呼ぶ．定義より $i\neq j$ の場合，$\boldsymbol{e}^i$ と $\boldsymbol{e}_j$ は規格直交している．反変基底は共変基底で表すことができ

$$\boldsymbol{e}^1=\frac{\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)},\quad \boldsymbol{e}^2=\frac{\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)},\quad \boldsymbol{e}^3=\frac{\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2}{\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)} \tag{5.1.29}$$

また，共変基底は反変基底で表すことができる．

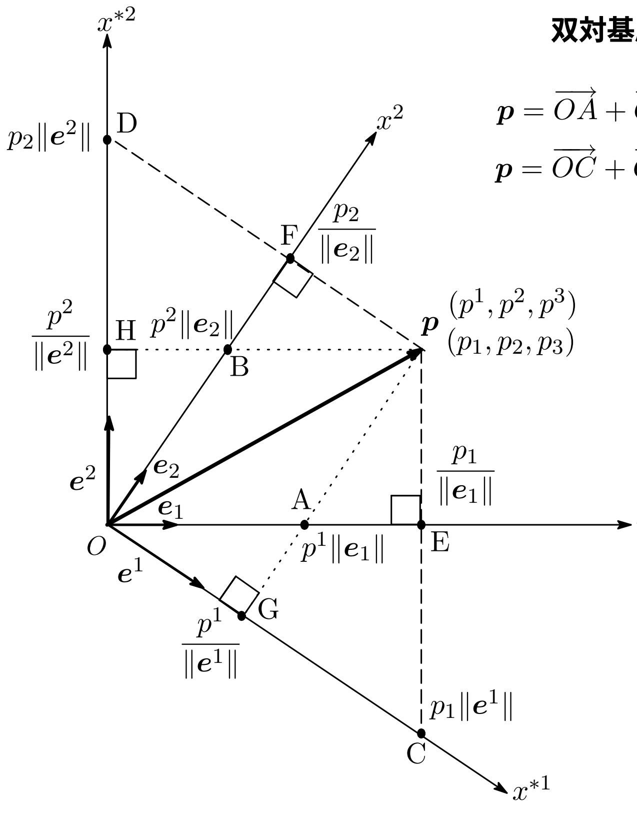
$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^3}{\boldsymbol{e}^1\cdot(\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^3)},\quad \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{e}^3\times\boldsymbol{e}^1}{\boldsymbol{e}^1\cdot(\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^3)},\quad \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{e}^1\times\boldsymbol{e}^2}{\boldsymbol{e}^1\cdot(\boldsymbol{e}^2\times\boldsymbol{e}^3)} \tag{5.1.30}$$

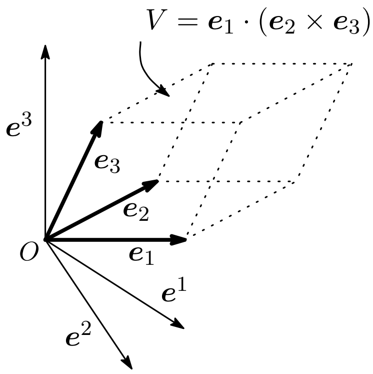
反変基底と共変基底はいわば“ 対 ”の関係で，これらを互いに双対基底と呼んでいるね．$\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_i=1$ より，反変基底 $\boldsymbol{e}^i$ の長さは共変基底 $\boldsymbol{e}_i$ の射影長の逆数の長さをもつ．つまり，相手が長くなればこちらは短くなり，こちらが長くなれば相手は短くなるという相反関係だね．反変基底ベクトルというのは固体物理の結晶格子の話などにでてくる逆格子ベクトルをイメージしてもいいだろう．

双対基底

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=p^1\boldsymbol{e}_1+p^2\boldsymbol{e}_2$$

$$\boldsymbol{p}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=p_1\boldsymbol{e}^1+p_2\boldsymbol{e}^2$$





- エミリー：このセクションの冒頭でベクトル $\boldsymbol{p}$ の大きさは

$$\|\boldsymbol{p}\|=\sqrt{\overline{OA}\cdot\overline{OE}+\overline{OB}\cdot\overline{OF}} \tag{5.1.31}$$

で表されたわ．$\overline{OE},\overline{OF}$ を共変ベクトル成分の長さとして取り扱ったけど，本当は $\overline{OC},\overline{OD}$ がそれに当たるのね．

- K氏：そうなんだ．そこで $\overline{OE},\overline{OF}$ の代わりに $\overline{OC},\overline{OD}$ を (5.1.32) に入れると共変・反変基底の $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^i=1$ が効いて

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{p}\| &= \sqrt{\overline{OA}\cdot\overline{OC}+\overline{OB}\cdot\overline{OD}}=\sqrt{p^1\|\boldsymbol{e}_1\|\cdot p_1\|\boldsymbol{e}^1\|+p^2\|\boldsymbol{e}_2\|\cdot p_2\|\boldsymbol{e}^2\|}\\ &= \sqrt{p^1p_1+p^2p_2}\end{aligned} \tag{5.1.32}$$

と (5.1.19) と同じ結果を得るだろう．

- エミリー：そうね．
- K氏：共変基底 $\boldsymbol{e}_i$ と双対な反変基底 $\boldsymbol{e}^j$ は計量行列を介して (5.1.1) と同じく

$$\boldsymbol{e}_i=g_{ij}\,\boldsymbol{e}^j,\quad \boldsymbol{e}^i=g^{ij}\,\boldsymbol{e}_j \tag{5.1.33}$$

の関係で結ばれる．この証明をやってみるかい．

- エミリー：そうね，$\boldsymbol{e}_i$ と $\boldsymbol{e}^j$ は線形変換で結ばれるので，変換係数を h_{ij} とすると

$$\boldsymbol{e}_i=h_{ij}\,\boldsymbol{e}^j$$

$\boldsymbol{e}_k$ との内積をとると

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k=h_{ij}\boldsymbol{e}^j\cdot\boldsymbol{e}_k=h_{ij}\delta^j_k=h_{ik}=g_{ik},\quad \therefore\ h_{ij}=g_{ij}$$

次に，この逆を取ると

$$\boldsymbol{e}^i=g^{ij}\boldsymbol{e}_j \tag{5.1.34}$$

が得られる．

- K氏：そうだね．反変基底と反変計量行列の関係は

$$\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j=g^{ik}g^{j\ell}\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_\ell=g^{ik}(g^{j\ell}g_{k\ell})=g^{ik}\delta^j_k=g^{ij}$$

なので，Σ^* 系での計量行列 g^{ij}（反変計量行列）として

$$g^{ij}=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j \tag{5.1.35}$$

と定義できるね．これは計量テンソルの反変成分ともいわれる．

- エミリー：Σ^* と Σ'^* の双対基底間同士の変換はどうなるのかしら？
- K氏：共変基底の座標変換公式は (5.1.21) だったね．反変基底の場合も同様にして

$$\boldsymbol{e}^{i\prime}=b^i_j\boldsymbol{e}^j \tag{5.1.36}$$

となる．まとめておくと

$$\left\{\begin{array}{lll}\boldsymbol{e}_i=g_{ij}\boldsymbol{e}^j, & \boldsymbol{e}^i=g^{ij}\boldsymbol{e}_j, & \boldsymbol{e}^{i\prime}=b^i_j\,\boldsymbol{e}^j\\ g_{ik}g^{jk}=\delta^j_k, & g^{ij}=\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j, & g^{ij\prime}=b^i{}_kb^j{}_\ell g^{k\ell}\end{array}\right. \tag{5.1.37}$$

5.2 2階テンソルの座標変換

5.2.1 混合テンソル成分

- K氏：2階テンソルを考える．$T\boldsymbol{e}_i$ は反変成分を持つベクトルだね[1]．基底 $\boldsymbol{e}_j$ で展開すると

$$T\boldsymbol{e}_i = T^j{}_i\boldsymbol{e}_j = T^1{}_i\boldsymbol{e}_1 + T^2{}_i\boldsymbol{e}_2 + T^3{}_i\boldsymbol{e}_3 \tag{5.2.1}$$

となる．係数 $T^j{}_i$ を2階テンソル T の共変基底 $\boldsymbol{e}_i$ に関する混合成分と呼んでいる. 係数を T_{11} というように書かずに添え字を上下に分けて書く理由は，反変基底が存在する斜交座標が舞台となっているからなんだね．直交直線座標系でのテンソル成分は (1.1.12) で表され

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot T\boldsymbol{e}_j = T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) \tag{5.2.2}$$

だった．いま，(5.2.1) の両辺に反変基底 $\boldsymbol{e}^\mu$ をかけると

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}^\mu \cdot T\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}^\mu \cdot T^\nu{}_i\boldsymbol{e}_\nu = (\boldsymbol{e}^\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu)T^\nu{}_i = g^\nu_\mu T^\nu{}_i = \delta^\mu_\nu T^\nu{}_i = T^\mu{}_i \\ &\therefore\ T^j{}_i = \boldsymbol{e}^i \cdot T\boldsymbol{e}_j = T(\boldsymbol{e}^i,\, \boldsymbol{e}_j) \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

となるだろう．(5.2.2) とよく見較べて欲しい．$T^j{}_i$ は添え字が上下についているので反変・共変混ざり合った混合テンソル成分というわけだね．同様にして，

$$T_i^j = \boldsymbol{e}_i \cdot T\boldsymbol{e}^j = T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j) \tag{5.2.4}$$

も混合テンソル成分だ．また，

$$g^m_n = \boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}^m = \delta^m_n \tag{5.2.5}$$

を計量テンソルの混合成分という．

5.2.2 共変成分の座標変換

さて，2階テンソルを

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot T\boldsymbol{e}_j = T(\boldsymbol{e}_i,\, \boldsymbol{e}_j) \tag{5.2.6}$$

とすれば[2]，任意のベクトル $\boldsymbol{u} = u^i\boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{e}_i$ に対して[3]

$$T(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = T_{ij}u^iv^j \tag{5.2.7}$$

が成り立つ[4]．T_{ij} をテンソル T の基底 $\boldsymbol{e}_i$ に対する成分といった．異なる基底 $\boldsymbol{e}'_m$, $\boldsymbol{e}'_n$ に対するテンソル成分は

$$T'_{mn} = T(\boldsymbol{e}'_m, \boldsymbol{e}'_n) \tag{5.2.8}$$

で与えられる．基底の座標変換公式は

$$\boldsymbol{e}'_m = a^i{}_m\boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}'_n = a^j{}_n\boldsymbol{e}_j \tag{5.2.9}$$

なので，これを (5.2.8) に入れると

$$T'_{mn} = T(a^i{}_m\boldsymbol{e}_i, a^j{}_n\boldsymbol{e}_j) = a^i{}_m a^j{}_n T(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = a^i{}_m a^j{}_n T_{ij} \tag{5.2.10}$$

が得られる．この変換式は，(5.1.25) 共変ベクトル成分の変換式の2重写しのような形をしているだろう．(5.2.10) がテンソルの共変成分の座標変換公式だ．

[1] $\boldsymbol{p} = p^i\boldsymbol{e}_i$ で p^i は反変成分だったことを思い出しましょう．
[2] (2.1.2) を参照.
[3] 反変成分を持ったベクトルなので反変ベクトルと呼ばれることもある．
[4] (2.1.10) 参照.

5.2.3　反変成分の座標変換

- K氏：次に 2 階テンソルを反変基底をつかって

$$T^{ij} = \boldsymbol{e}^i \cdot T\,\boldsymbol{e}^j = T(\,\boldsymbol{e}^i,\,\boldsymbol{e}^j\,) \tag{5.2.11}$$

とおこう．添え字を上付きにした T^{ij} は反変テンソル成分という．任意のベクトル $\boldsymbol{p} = p_i\,\boldsymbol{e}^i$, $\boldsymbol{q} = q_i\,\boldsymbol{e}^i$ に対して

$$T(\,\boldsymbol{p},\,\boldsymbol{q}\,) = T^{\,ij} p_i\,q_j \tag{5.2.12}$$

となる．テンソルの反変成分の変換座標公式は (5.1.36) を使って次式を得る．

$$T'^{\,mn} = T(\,\boldsymbol{e}'^{\,m},\,\boldsymbol{e}'^{\,n}\,) = b^m_j b^n_k\,T(\,\boldsymbol{e}^j,\,\boldsymbol{e}^k\,) = b^m_j b^n_k\,T^{\,jk} \tag{5.2.13}$$

5.2.4　混合成分の座標変換

- K氏：最後にテンソルの混合成分の座標変換公式を求めておこう．$T\boldsymbol{e}'_i$ を基底 $\boldsymbol{e}'_\mu$ で展開して

$$\begin{aligned} T\boldsymbol{e}'_i &= T^{\mu}{}_i{}'\boldsymbol{e}'_\mu = T^{1}{}_i{}'\boldsymbol{e}_1 + T^{2}{}_i{}'\boldsymbol{e}_2 + T^{3}{}_i{}'\boldsymbol{e}_3 \\ &= T^{\mu}{}_i{}'(a^\nu{}_\mu \boldsymbol{e}_\nu) = a^\nu{}_\mu T^{\mu}{}_i{}'\boldsymbol{e}_\nu \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

となる．一方，

$$T\boldsymbol{e}'_i = T(a^\mu{}_i \boldsymbol{e}_\mu) = a^\mu{}_i T\boldsymbol{e}_\mu = a^\mu{}_i T^\nu{}_\mu \boldsymbol{e}_\nu \tag{5.2.15}$$

なので，(5.2.14) と (5.2.15) を等しいと置くと

$$a^\nu{}_\mu T^{\mu}{}_i{}'\boldsymbol{e}_\nu = a^\mu_i T^\nu{}_\mu \boldsymbol{e}_\nu \qquad \therefore\ a^\nu{}_\mu T^{\mu}{}_i{}' = a^\mu{}_i T^\nu{}_\mu \tag{5.2.16}$$

これに逆行列 $b^j{}_\nu = (a^j{}_\nu)^{-1}$ を両辺にかけると

$$\begin{aligned} & b^j{}_\nu a^\nu{}_\mu T^{\mu}{}_i{}' = \delta^\xi_\mu T^{\mu}{}_i{}' = T^{j}{}_i{}' = b^j{}_\nu a^\mu{}_i T^\nu{}_\mu \\ \therefore\quad & T^{j}{}_i{}' = b^j{}_\nu a^\mu{}_i T^\nu{}_\mu \end{aligned} \tag{5.2.17}$$

が得られる．同様に，混合テンソル T^j_i の座標変換公式として

$$T^{j\prime}_i = b^\mu{}_i a^j{}_\nu T^\nu_\mu \tag{5.2.18}$$

が得られる．共変テンソル，反変テンソル，混合テンソルの座標変換公式を以下にまとめておく．

・共変テンソル成分　　**・反変テンソル成分**　　**・混合テンソル成分**

$$T'_{ij} = a^i{}_\mu a^j{}_\nu T_{\mu\nu}\ ,\ T^{ij\prime} = b^i{}_\mu b^j{}_\nu T^{\mu\nu}\ ,\ T^{j}{}_i{}' = b^j{}_\nu a^\mu{}_i T^\nu{}_\mu$$

5.2.5　混合成分と共変・反変成分の関係

- K氏：$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot T\boldsymbol{e}_j$ に (5.2.1) を入れると混合成分と共変成分を結びつける関係式

$$T_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot (T^{\,k}_{\;j}\, \boldsymbol{e}_k) = T^{\,k}_{\;j}\, \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k = g_{ik}\, T^{\,k}_{\;j} \tag{5.2.19}$$

が得られる．また，(5.2.19) の両辺に g^{ik} を掛けて整理すると

$$\begin{aligned} &g^{ik} T_{ij} = g^{ik} g_{i\ell} T^{\ell}_{\;\,j} = \delta^k_\ell T^{\ell}_{\;\,j} = T^k_{\;\,j} \\ &\therefore\ T^k_{\;\,j} = g^{ik} T_{ij} = g^{ki} T_{ij} \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

となり，反変計量行列を使うと共変テンソル成分から混合テンソル成分が得られることが分かる．
　次に，反変テンソル成分を

$$T^{ij} = T^j_1\, \boldsymbol{e}^1 + T^j_2\, \boldsymbol{e}^2 + T^j_3\, \boldsymbol{e}^3 \tag{5.2.21}$$

とおいて，(5.2.11) に入れると混合成分と反変成分を結びつける関係式

$$\begin{aligned} &T^{\,ij} = \boldsymbol{e}^{\,i} \cdot T\, \boldsymbol{e}^{\,j} = \boldsymbol{e}^{\,i} \cdot (T^{j}_{\;\,k}\, \boldsymbol{e}^{\,k}) = T^{j}_{\;\,k}\, \boldsymbol{e}^{\,i} \cdot \boldsymbol{e}^{\,k} = T^{j}_{\;\,k}\, g^{ik} = g^{kj} T^{i}_{\;\,k} \\ &\therefore\ T^{ij} = g^{kj} T^{i}_{\;\,k} = g^{i\mu} g^{jk} T_{\mu k} \end{aligned} \tag{5.2.22}$$

を得る．また，これから

$$T^{\,i}_{\;\,k} = g_{kj} T^{ij} \tag{5.2.23}$$

を得る．共変計量行列を使うと反変テンソル成分から混合テンソル成分が得られる．
また，(5.1.33) を使えば

$$\begin{aligned} &T^j_i = \boldsymbol{e}_i \cdot T\boldsymbol{e}^j = g_{i\mu} \boldsymbol{e}^\mu \cdot T(g^{j\nu} \boldsymbol{e}_\nu) = g_{i\mu} g^{j\nu} \boldsymbol{e}^\mu \cdot T\boldsymbol{e}_\nu = g_{i\mu} g^{j\nu} T^\mu_{\;\nu} \\ &\therefore\ \ T^j_i = g_{i\mu} g^{j\nu} T^\mu_{\;\nu} \end{aligned} \tag{5.2.24}$$

以上の結果をまとめておくと次のようになるね．

$$\begin{cases} T_{ij} = g_{ik}\, T^{\,k}_{\;j} = g_{ik} g_{j\mu} T^{k\mu} & T^{ij} = g^{i\mu} g^{jk} T_{\mu k} \\ T^{\,i}_{\;\,k} = g_{kj} T^{ij} & T^k_{\;\,j} = g^{ki} T_{ij} \\ T^j_i = g_{i\mu} g^{j\nu} T^\mu_{\;\nu} & \end{cases} \tag{5.2.25}$$